

# 離子阱中的 0 與 1

文/郭西川

摘要

離子阱(Ion trap)是目前少數幾個有希望可以做為實現量子計算的系統之一。在文章的前半段，我們介紹離子阱的基本工作原理以及在陷獲離子(Trapped ion)構成的量子位元中，資料的寫入與讀出(亦即量子態的備製及測量)。利用線性阱將離子排列成一維的量子位元串列就形成所謂的離子阱量子電腦。而在文章的後半段中，我們介紹在離子阱量子電腦中如何進行資料的儲存於與不同量子位元間資訊的交換與傳遞。文章的最後，我們討論離子阱量子電腦的優缺點，以及它在現行的技術上所必須面臨的挑戰。

## 一、前言

量子資訊(quantum information) [1,2]是物理學界最近相當熱門的一個領域。在這個融合了資訊科學與量子物理的新興領域中，尤其以量子計算(quantum computation)更是吸引了眾多的物理學家全力投入研究行列的一個課題。

量子計算的概念最早由 IBM 的科學家 R. Landauer 及 C. Bennett 於 70 年代提出。他們主要探討的是計算過程中諸如自由能 (free energy)、資訊 (informations) 與可逆性 (reversibility)之間的關係。80 年代初期，阿崗國家實驗室的 P. Benioff 首先提出二能階的量子系統可以用來模擬數位計算；稍後費因曼也對這個問題產生興趣而著手研究，並在 1981 年於麻省理工學院舉行的 First Conference on Physics of

Computation 中給了一場演講，勾勒出以量子現象實現計算的願景。1985 年，牛津大學的 D. Deutsch 提出量子圖林機(quantum Turing machine)的概念，量子計算才開始具備了數學的基本型式。然而上述的量子計算研究多半侷限於探討計算的物理本質，還停留在相當抽象的層次，尚未進一步跨入發展演算法的階段。

1994 年，貝爾實驗室的應用數學家 P. Shor 指出 [3]，相對於傳統電子計算機，利用量子計算可以在更短的時間內將一個很大的整數分解成質因數的乘積。這個結論開啟量子計算的一個新階段：有別於傳統計算法則的量子演算法(quantum algorithm)確實有其實用性，絕非科學家口袋中的戲法。自此之後，新的量子演算法陸續的被提出來，而物理學家接下來所面臨的重要的課題之一，就是如何去建造一部真正的量子計算機，來執行這

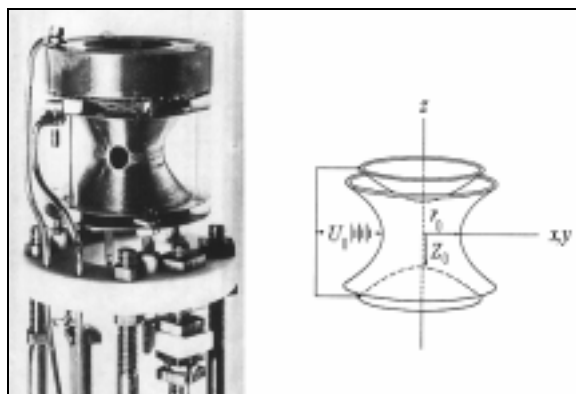
些量子演算法。許多量子系統都曾被點名做為量子計算機的基礎架構，例如光子的偏振 (photon polarization)、空腔量子電動力學 (cavity quantum electrodynamics, CQED)、離子阱 (ion trap) 以及核磁共振 (nuclear magnetic resonance, NMR) 等等。以目前的技術來看，這其中以離子阱與核磁共振最具可行性。事實上，核磁共振已經在這場競賽中先馳得點：以 I. Chuang 為首的 IBM 研究團隊在 2002 年的春天，成功地在一個人工合成的分子中 (內含 7 個量子位元) 利用 NMR 完成  $N=15$  的因數分解 (factorization) [4]，而離子阱看來還身陷苦戰之中。不過這場比賽才剛開始，誰輸誰贏還是未定之數，因為真正的挑戰在於能否有效率地分解遠大於 15 的整數，物理學家還有很長一段路要走。

離子阱雖然屈居下風，不過它卻是一個非常有趣而值得認識的物理系統，在這裡面牽涉到許多量子光學的應用。在這篇文章中，我們將介紹離子阱的基本原理、量子態的備製及測量，以及如何利用陷獲離子 (trapped ion) 來從事量子計算。有興趣的讀者可從文後的參考文獻得到更詳盡的資料。

## 二、離子阱 (Ion Trap)

離子阱並不是一個很新穎的裝置，早在 50 年代末它就被應用於改進光譜測量的精確度。設法提高光譜精確度是每個從事原子光譜研究的科學家所追求的「聖杯」，有人曾這麼比喻：如果哪一天上帝允諾幫每個人實現一個願望，十個原子光譜學家中，大概有九個都會希望上帝做同一件事——以祂偉大的神力把一個原子或分子一動也不動地固

定在空間中某一點，好讓這些科學家把光譜線量到無比精確。這當然只是一個夢想，一個在真實世界中永遠無法實現的願望。由於測不準原理的作祟， $\Delta E$  不可能無限小，所以譜線不可能量到無限準。但是如果我們能使  $\Delta t$  夠大， $\Delta E$  還是可以很小，換言之，想要量到更精準的譜線，測量時間必須拉長，因此必須設法侷限住待測物體。於是離子阱因應而生，它的原理十分簡單：利用電荷與電磁場間的交互作用力來牽制帶電粒子的運動，以達到將其侷限在某個小範圍內的目的。典型的離子阱構造如圖一，主要可分為三部份：上下兩片圓蓋狀電極，以及中間具雙曲面外型的環狀電極 [5]。



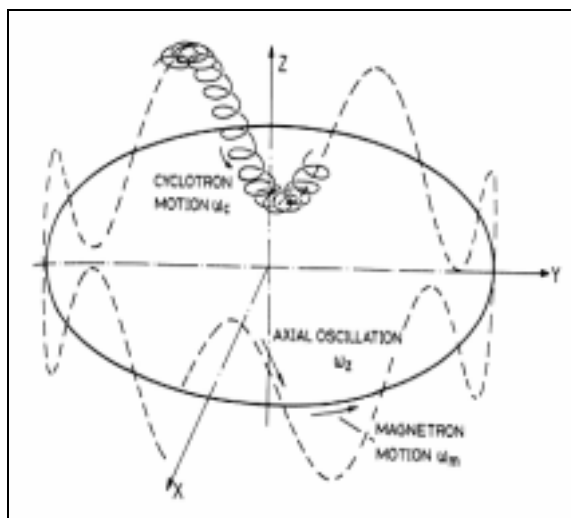
圖一：典型離子阱的外觀與構造圖 (本圖取自參考資料[5])。

操作時，在兩片圓蓋狀電極與環狀電極間施以  $U_0$  的直流電壓，則在離子阱中心 (也就是圖一左圖中小圓孔的中心位置) 附近的位勢可近似成如下的形式：

$$\phi(x, y, z) = \frac{U_0}{r_0^2 + 2Z_0^2} (2z^2 - x^2 - y^2) \quad (1)$$

請注意上式中沿著縱向( $z$  軸方向)與沿著橫向( $x$ 、 $y$  軸)的位勢差了一個負號,因此阱中央(即原點)的位勢是個鞍點(saddle point)。這表示不管外加的是正電壓或負電壓,帶電離子在這個位勢中感受到的作用力,沿  $z$  方向是被吸向中心,而在  $x$ 、 $y$  方向上則被推離中心,或是兩者同時反過來。換句話說,只單獨考慮外加靜電位勢時,離子的運動不能同時被束縛在空間中三個方向上。此即所謂的 Earnshaw 定理。因此為了將離子穩定限制在空間中某個小區域裡運動,我們必須再引入其它的物理機制,來加強對離子的捕獲作用。常見的作法是在原來的靜電位勢外,再沿  $z$  軸方向另加一道磁場,這就是所謂的 Penning 阱。

圖二是離子在 Penning 阱中運動的示意圖,我們可以很清楚地看到離子在  $z$  方向上來回作簡諧振盪,而  $x$ 、 $y$  方向則是作迴旋運動。我們也可以用一道高頻的交流電場來取代上述磁場,此即所謂的 Paul 阱,它的原理是讓帶電粒子在束縛與發散兩種不同的運動狀態中快速切換,以達到穩定捕捉離子的目的。以上提到的 Penning 阱及 Paul 阱是最常見的兩種離子阱,使用的場合端看實驗的目的。要量測與磁場有關的物理量時(例如自旋的進動頻率,)最好使用 Penning 阱,因為實驗中反正要用到磁場。但是如果實驗的過程中必需排除磁場(例如譜線的超精細分裂),則最好使用 Paul 阱。其它特殊用途的離子阱包括同時使用磁場及交流電場的組合併(combined trap)、環形阱(ring trap)及我們留在最後介紹的線性阱(linear trap)。



圖二：離子在 Penning 阱中的運動軌跡示意圖(本圖取自參考資料[5])。

### 三、捕捉 0 與 1

就現在的技術而言,科學家可以輕易地以雷射光場來激發原子內部的能階,使電子非常準確地在不同原子能階間進行躍遷。這一點對於被捕獲的離子來說,當然也是輕而易舉,但是離子阱更令人訝異的是,我們甚至可以用雷射光場來精確控制原子的外在運動狀態。現在我們來解釋一下它的原理。為了簡單起見,我們只考慮一維的模型,換言之,我們只考慮原子在某一個特定方向上的運動。而且為了更進一步簡化計算過程,我們假設原子只有兩個能階,所以現在整個系統可以簡化成如下的模型:沿著  $z$  方向,有一條理想的「彈簧」,尾端上「黏」著一個二能階的原子,而且同時有一道雷射光束照射這原子上。這個系統的漢米頓函數如下:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hbar \nu \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z}{2} \\ \hat{H}_{\text{int}} &= \lambda E_0 e^{i(kz - \omega_L t - \varphi)} \hat{\sigma}_+ + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (3)$$

在這裡  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^\dagger$  為一維諧振子的消滅與產生算符； $\hat{\sigma}_z$ ,  $\hat{\sigma}_+$  與  $\hat{\sigma}_-$  為 Pauli 矩陣； $\nu$  為諧振子的振動頻率； $\omega_0$  為兩個原子能階的頻率差； $\omega_L$  為入射光的頻率； $E_0$  為入射光的電場強度； $\lambda$  為電場與原子的耦合常數； $\varphi$  為入射光的相位。

因為離子的運動為微觀的過程，所以在阱中離子的質心位置可由諧振子的消滅與產生算符來表示：

$$z \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) = \frac{\eta}{k} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (4)$$

其中  $\eta$  即所謂的「Lamb-Dicke 參數」(Lamb-Dicke parameter)，它相當於諧振子基態波包的寬度比上入射光的波長。在「交互作用表象」(interaction picture)中，原子與光場作用的部份可變換成：

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar \Omega_L \hat{\sigma}_+ \sum_{j,n=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{j+n}}{j!n!} (\hat{b}^\dagger)^j \hat{b}^n e^{-i[\omega_L - \omega_0 + (n-j)\nu]} + \text{h.c.} \quad (5)$$

其中  $\Omega_L = \lambda E_0 e^{-\eta^2/2} e^{-i\varphi}$ 。

如果我們把雷射光的頻率調為  $\Delta = \omega_L - \omega_0 = l\nu$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，則  $l$  為正整數的雷射光頻率稱為「第  $l$  藍側帶」(the  $l$ -th blue sideband)，反之則稱為「第  $l$  紅側帶」(the  $l$ -th red sideband)。接著，我們進一步要求離子

的運動滿足以下兩個條件：(1) 離子在阱中來回振盪的振幅非常小，也就是說離子的運動狀態滿足 Lamb-Dicke 極限， $\eta \ll 1$ ；(2) 原子在兩個能階之間變換的速率非常慢，也就是說只有當原子在阱中來回振盪了很多次後，才會在兩個能階間發生一次躍遷。這相當於要求  $|\Omega_L| \ll \nu$ ，即所謂的「良好解析側帶極限」(well-resolved sideband limit)。

綜合以上條件，我們就可以將(5)式近似到最低階。例如我們把雷射光的頻率調至第  $l$  紅側帶，則我們就可以得到以下的交互作用項：

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar \Omega_L (i\eta)^l}{l!} \hat{b}^l \hat{\sigma}_+ + \text{h.c.} \quad (6)$$

這個漢米頓函數相當於量子光學中描述空腔 (cavity) 中量子化光場子與原子交互作用的「Jaynes-Cummings 模型」。這兩個系統差別的地方在於離子阱取代了空腔的角色，而量子化後的離子質心運動則取代了原來空腔中的光子。

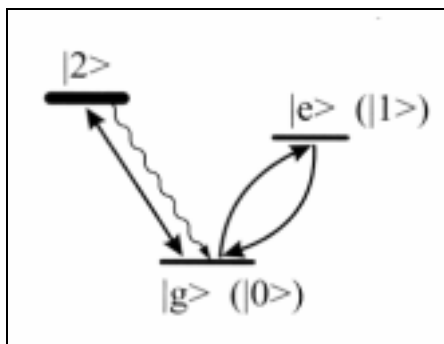
除了上述的差別之外，離子阱還有一個很重要的特性，那就是原子與振動模的耦合常數可經由改變外加雷射場的參數 (例如強度、相位) 來加以調變。這個優點是空腔-原子系統所沒有的，因此藉由不同時序的雷射脈衝來驅動原子，我們得以準確控制原子的運動狀態，這正是以陷獲離子 (trapped ion) 來擔任量子位元最基本的要求。例如，我們可以用一系列  $\pi$ -脈衝雷射，來得到諧振子的第  $n$  個能量本徵態，或是所謂的 Fock 態  $|n\rangle$ 。作法如下：令  $|g\rangle$  及  $|e\rangle$  分別代表把原子能階的基態及激態。一開始我們將阱中的離子以雷射冷卻至最低的狀態  $|g, 0\rangle$ 。首先加一道第 1 藍側帶的  $\pi$ -脈衝

雷射使  $|g, 0\rangle \rightarrow |e, 1\rangle$ ，之後加一道第 1 紅側帶的  
-脈衝雷射使  $|e, 1\rangle \rightarrow |g, 2\rangle$ ；重複此過程直到離  
子的狀態變成  $|e, n\rangle$ 。最後再加一道頻差  $\Delta = 0$  的  
-脈衝使得  $|e, n\rangle \rightarrow |g, n\rangle$ ，而此時離子的內能  
態與外在的運動狀態是完全分離的。

#### 四、到底是 0 還是 1

現在大家應該對如何在離子阱中備製量子態有了一些瞭解。在處理量子資訊的過程中，量子態的備製相當於把資料寫入量子位元中。相對於寫入的動作，從一個量子位元讀出資料也同樣重要，它相當於量子態的測量。接下來我們來探討一下，如何以量子跳躍 (quantum jump) 的方法來測量陷獲離子的原子能態。

量子位元是由原子能階中的基態  $|g\rangle$  及暫穩激發態  $|e\rangle$  構成，他們各自對應到  $|0\rangle$  及  $|1\rangle$  這兩種狀態。要測量量子位元的狀態，我們必須在原來的兩個原子能階  $|g\rangle$  及  $|e\rangle$  之外，再找另一個短生命期的輔助原子能階  $|2\rangle$ ，形成一個三能階的系統 (如圖三)。



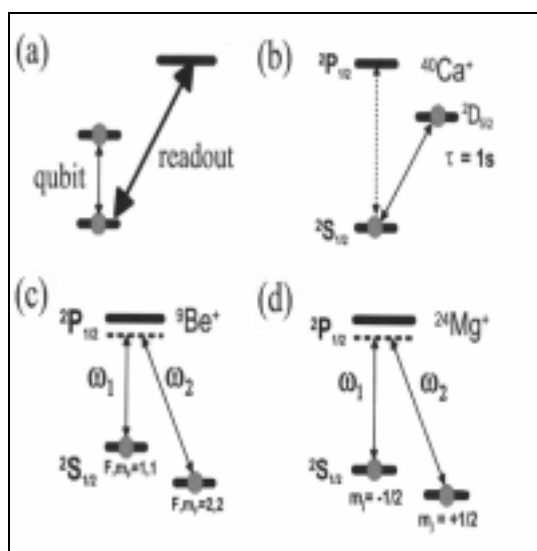
圖三：量子跳躍法中的原子能階結構 (本圖取自參考資料[2])。

基本上  $|2\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  的躍遷是「偶極禁制」的 (dipole forbidden)，但是  $|2\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  之間卻有很強的偶極躍遷，而且  $|2\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  與  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  兩者之間的躍遷頻率不能太接近。當量子計算進行到某一階段，原子可能處於  $|g\rangle$  及  $|e\rangle$  的疊加態， $\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$ 。對量子位元進行測量時，用一道頻率與  $|2\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  躍遷頻率相同的探測雷射照射原子。如果原子在基態  $|g\rangle$ ，則很快被探測雷射激發到能階  $|2\rangle$ 。但是由於  $|g\rangle$  及  $|2\rangle$  之間有很強的耦合，原子停在能階  $|2\rangle$  的時間不會很長，它馬上就會自發輻射放出一個光子後再回到基態  $|g\rangle$ ，完成一個循環。原則上，這個單一光子散射的事件是可以偵測到的，雖然效率不是很高 (約為千分之一左右)。但是我們可讓探測雷射持續照射原子，使得  $|g\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |g\rangle$  這個循環持續發生，讓原子在這期間內不斷的散射光子。在這數以百萬計的光子中只要有數個光子被偵測到，就幾乎可以確定原子是在基態。如果原子是停在暫穩態  $|e\rangle$ ，則根本不會有散射光子出現。

量子跳躍法是一種高效率的原子能階測量方法。它的高效率乃因為我們是直接測量原子周圍的熱庫而非原子本身。每次單獨測量的結果都非常明確，原子不是在基態  $|g\rangle$  (原子發出螢光) 就是在暫穩態  $|e\rangle$  (原子不發光)。在累積多次的實驗結果後，就可決定  $|\alpha|^2$  的值了。

順帶一提的是，離子阱可以捕獲不同種類的離子而這些離子的能階結構也不盡相同。因此量子位元除了可以儲存於一個二能階原子的基態及暫穩態外 [如圖四(b)]，也可以儲對於存於原子的基

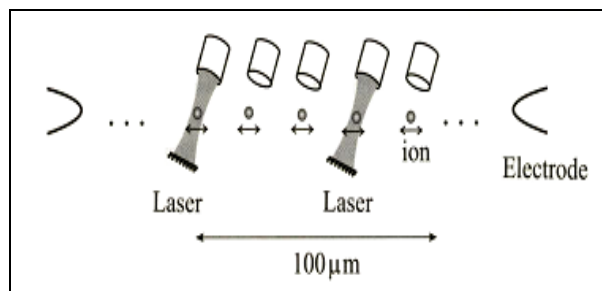
態中的超精細能階[如圖四(c)]或是 Zeeman 次能階[如圖四(d)]。



圖四：適用於量子計算的陷獲離子之能階結構圖。  
(本圖取自參考資料[2])

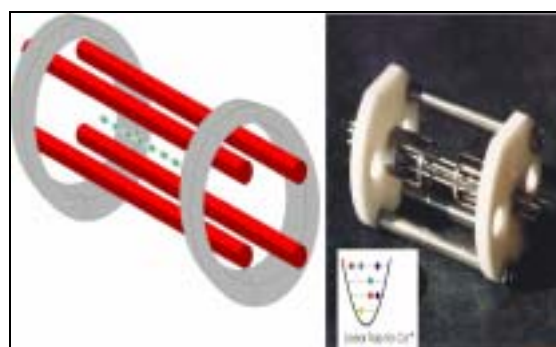
## 五、離子阱中的量子計算

1995 年，奧地利因斯布魯克 (Innsburck) 大學的 J. I. Cirac 及 P. Zoller 提出了利用離子阱來建造量子計算機的構想 [6]。這個模型的基本構想是利用所謂的線性阱將許多的離子排成一直線，形成一維的量子位元陣列，再藉由操控個別離子 (量子位元) 的狀態或是不同離子間的糾纏態 (entangled states)，以達成量子計算的目的 (如圖五所示)。



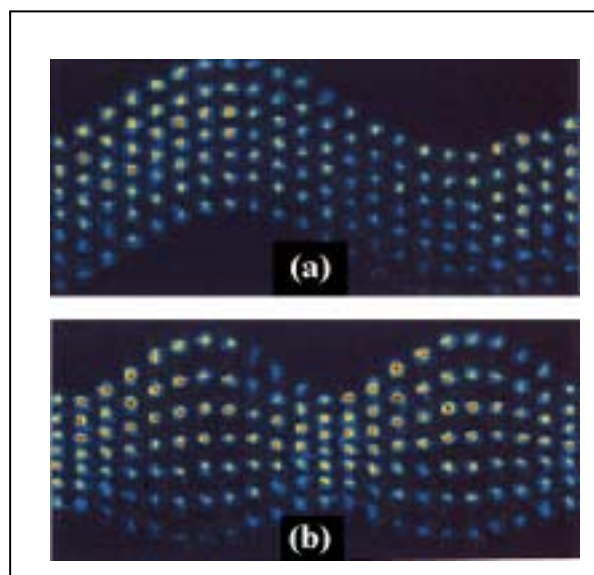
圖五：線性離子阱示意圖。(本圖取自參考資料[2])

圖六是 Innsburck 大學所設計使用的線性離子阱：拉長的電極 (紅色部份，長度約為 1 公分大小) 上施加了 1000 伏的射頻交流電壓 (頻率為 16 MHz)，以便將離子陷獲在徑向上；兩端的環形電極上加了約 2000 伏的電壓，用來提供軸心方向上捕獲離子的電場。離子 (圖中標示為綠點) 就沿著半徑及軸心方向來來回回地振盪，不過由於徑向上的捕獲頻率  $\omega_r$  (4 MHz) 遠遠大於軸向上的捕獲頻率  $\omega_z$  (700 kHz)，所有被捕獲的離子可近似成在軸向上做一維的運動。當離子與離子間的庫倫斥力與離子阱的束縛力達到平衡時，每個離子會在自己的平衡位置附近作小幅度的振動，而此時離子與離子間的平均距離約為 10 微米左右。



圖六：Innsburck 大學所設計使用的線性離子阱外觀及構造。(本圖取自 Innsburck 大學物理系)

在線性阱中運動的離子有一個很重要的特性，那就是他們之間因庫倫作用而產生耦合，因此它們的位置不再能以各別離子的運動來描述，而必須考慮整串離子的集體運動 (collective motion)，換言之，我們得探討離子串的簡正振動模態(normal modes of vibration)。理論計算的結果顯示， $N$ 個離子所構成的一維鏈總共有  $N$ 個簡正模態。其中最低的簡正模態就是所有的離子都以相同的振幅同時來回移動(如圖七(a)所示)，就好像是由  $N$ 個離子所構成的剛體一般，所以這個模態又稱為質心模(center-of-mass mode)，它的頻率與軸向上的捕獲頻率 $\omega_z$ 相等。第二個簡正模態稱為呼吸模(breathing mode)。在這個振動模態中，位居離子阱中心兩側相對位置的兩個離子各自以相同振幅但是相反的方向運動，而每個離子的振幅正比於它與離子阱中心的距離(如圖七(b)所示)。



圖七：7個陷獲離子的集體運動：(a)質心模；(b)呼吸模。(本圖取自 Innsbruck 大學物理系)

在Cirac及Zoller的量子計算模型中利用量子化的質心模來傳遞資訊。在他們的構想中，開始的時候先將離子內阱質心模振動以解析側帶冷卻(resolved sideband cooling)的方法降至最低的量子態( $n=0$ )。量子資訊可以用以下的方式從串列上的任一個離子傳送到另一個離子：選定串列上其中一個離子，並假設它的原子能態處在疊加態， $\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$ 。接著以一道第一紅側帶的 $\pi$ -脈衝雷射照這個離子，則我們可以得到下列結果

$$\begin{aligned} (\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle) \otimes |0\rangle &= \alpha|g,0\rangle + \beta|e,0\rangle \\ &\rightarrow \alpha|e,1\rangle + \beta|e,0\rangle = |e\rangle \otimes (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \end{aligned} \quad (7)$$

也就是說在雷射脈衝通過之後，質心模運動會由原來的基態變成基態與第一激發態的線性疊加，而這個運動態的線性疊加又正好對應到原來離子中的內原子態的線性疊加。因為離子串列以質心模振動時，所有的離子都會同步移動，所以原先選定的量子位元內的資訊就可以藉由質心模傳遞到串列上的每一個量子位元。

以上所述，是在離子阱內實現量子計算的基本原理。透過對單一離子狀態的控制程序，及利用質心模來交換量子資訊，原則是可以在離子阱內實現若干基本的邏輯元件，例如控反閘。這一部份因篇幅所限，無法詳細說明，有興趣的讀者請參閱參考資料[1]。



## 六、前景與挑戰

與其它目前被提出來，可以用來實現量子計算的系統相比，離子阱具有以下優缺點：

優點：

1. 離子的原子能階有較長的脫散(decoherence)時間。
2. 較高的效率便於利用雷射脈衝來備製、操控及量測量子位元的狀態。

缺點：

1. 外加雷射強度、頻率及相位的不穩定性。
2. 離子與真空腔裡殘存氣體原子的碰撞。
3. 振動態與外界因素(例如像電荷)耦合的脫散限制了操作的次數。
4. 雷射聚焦處與離子所在真正位置的誤差。
5. 將一系列離子同時以雷射冷卻至基態，以現行的技術來說是具有相當的困難度。

量子力學的發明絕對是二十世紀中人類最偉大的心智成就之一。在量子力學誕生的五十年後，物理學家解放了深藏在原子內部的巨大能量，從此改變了人類的生活型態。而在量子力學誕生的一百年後，也是電子計算機發明的五十年後，物理學家卻嘗試著去馴服原子來做計算機的工作，所憑藉的只是量子力學裡最基本的原理。是再次創造歷史，還是不可能的任務，且讓我們拭目以待。

### 參考資料：

- [1] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press (2000).
- [2] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger,

*The Physics of Quantum Information*, Springer-Verlag Berlin (2000).

- [3] P. Shor, *Proc. of 35<sup>th</sup> Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, p. 124.
- [4] I. Chuang, *et. al.*, *Nature* **414**, 883 (2002).
- [5] G. Werth, *Contemp. Phys.* **26**, 241 (1985).
- [6] J.I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).

---

---

### 作者簡介

郭西川，國立清華大學物理博士，現任職國立彰化師範大學物理系副教授。研究專長：量子光學、統計物理。

Email: [scgou@cc.ncue.edu.tw](mailto:scgou@cc.ncue.edu.tw)